



304

A

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

صبح جمعه ۹۱/۱۲/۱۸ دفترچه شماره ۱	 <p>جمهوری اسلامی ایران وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان سنجش آموزش کشور</p>	اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود. امام خمینی (ره)		
<b>آزمون ورودی دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل در سال ۱۳۹۲</b>				
<b>رشته ی مجموعه ریاضی - ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)</b>				
تعداد سؤال: ۴۵		مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه		
عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات				
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (انالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیچیده، انالیز حقیقی ۱)	۴۵	۱	۴۵
این آزمون نمره منفی دارد				
<b>اسفندماه سال ۱۳۹۱</b>				
استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.				
حق چاپ و تکثیر سوالات بس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با تشخیص برابر مقررات رفتار می شود.				

# پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۲

304A

مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱)

۱- فرض کنید  $V$  یک فضای برداری با بعد  $n$  روی میدان  $F$  باشد. اگر  $T: V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی باشد به طوری که

$$T^2 = 0, \text{ آن گاه } (\text{rank}(T) \text{ رتبه‌ی } T \text{ و } n(T) \text{ پوچی } T \text{ است}).$$

$$\text{rank}(T) \leq \frac{n}{2} \quad (۱)$$

$$n(T) \leq \frac{n}{2} \quad (۲)$$

$$\text{rank}(T) \geq n(T) \quad (۳)$$

$$\text{rank}(T) \geq \frac{n}{2} \quad (۴)$$

۲- فرض کنید  $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \in M_4(R)$ ، اگر  $\text{rank}(A) = 3$ ، مقدار  $t$  کدام است؟

$$۱ \quad (۱)$$

$$۰ \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$-۳ \quad (۴)$$

۳- فرض کنید  $A \in M_n(R)$  که  $n \geq 2$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه برای هر  $B \in M_n(R)$  داشته باشیم

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

آن است که:

$$\det(A) = 0 \quad (۱)$$

$$\Lambda = 0 \quad (۲)$$

$$\text{tr}(A) = 0 \quad (۳)$$

$$A \text{ پوچتوان باشد.} \quad (۴)$$

۴- اگر  $A$  یک ماتریس یاد متقارن از مرتبه‌ی  $n$  باشد یعنی  $A^t = -A$ ، کدام عبارت در مورد ماتریس الحاقی کلاسیک  $A$  یعنی

$$\text{adj} A$$

$$\text{adj} A \text{ متقارن است.} \quad (۱)$$

$$\text{adj} A \text{ یاد متقارن است.} \quad (۲)$$

$$\text{adj} A \text{ متقارن است اگر } n \text{ فرد باشد و یاد متقارن است اگر } n \text{ زوج باشد.} \quad (۳)$$

$$\text{adj} A \text{ یادمستقارن است اگر } n \text{ فرد باشد و متقارن است اگر } n \text{ زوج باشد.} \quad (۴)$$

۵- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $10 \times 10$  با درایه‌های  $\pm 1$  باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$3^9 \mid \det A \quad (۱)$$

$$5^9 \mid \det A \quad (۲)$$

$$7^9 \mid \det A \quad (۳)$$

$$2^9 \mid \det A \quad (۴)$$

## پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۳

304A

مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱)

۶- فرض کنید  $G$  گروهی متناهی بوده و به ازای هر دو زیر گروه دلخواه  $K$  و  $H$  داشته باشیم  $H \subseteq K$  یا  $K \subseteq H$ ، در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۱)  $G$  لزوماً دوری نیست.
- (۲)  $G$  حاصلضرب دکزتی دو گروه دوری است.
- (۳)  $G$  فقط دو زیرگروه دارد.
- (۴)  $G$  دوری است و مرتبه  $G$  توانی از یک عدد اول است.

۷- فرض کنید  $G$  یک گروه بوده که دارای زیر گروه ماکسیمال متناهی است. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $G$  متناهی است.
- (۲)  $G$  با تولید متناهی است.
- (۳) هر کلاس تزویجی  $G$  متناهی عضو دارد.
- (۴)  $G$  دارای یک زیر گروه اندیس متناهی است.

۸- فرض کنید  $G$  گروهی از مرتبه  $p^n$  باشد که  $p$  عددی اول است. اگر  $H$  زیرگروهی از  $G$  از مرتبه  $p^{n-2}$  باشد که  $H$  در  $G$  نرمال نیست آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $Z(G) \subseteq N_G(H)$
- (۲)  $G' \subseteq N_G(H)$
- (۳)  $N_G(H)$  زیرگروه نرمال  $G$  است.
- (۴)  $|G : N_G(H)| = p$

۹- فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار است ولی میدان نیست و  $P$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $R$  است. فرض کنید  $I = P[x]$  یک ایده‌آل حلقه چند جمله‌ایهای  $R[x]$  باشد که شامل همه چند جمله‌ای‌های واقع در  $R[x]$  است که ضرایب آنها در  $P$  است. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $I$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $R[x]$  است ولی اول نیست.
- (۲)  $I$  یک ایده‌آل اول  $R[x]$  است که ماکسیمال نیز می‌باشد.
- (۳)  $I$  یک ایده‌آل اول  $R[x]$  است ولی ماکسیمال نیست.
- (۴)  $I$  نه ایده‌آل اول  $R[x]$  است و نه ایده‌آل ماکسیمال  $R[x]$

۱۰- اگر  $\pi$  یک تراننش در گروه متقارن  $S_n$  و  $n \geq 2$ ، فرض شود آنگاه  $CS_n(\pi)$  با کدام گروه زیر یکرخت است؟

- (۱)  $S_{n-2}$
- (۲)  $S_{n-1}$
- (۳)  $\mathbb{Z}_2 \times S_{n-2}$
- (۴)  $\mathbb{Z}_2 \times S_{n-1}$

۱۱- با فرض آنکه  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، کدام یک از ضوابط ذیل یک نرم بر  $\mathbb{R}^2$  تعریف نمی‌کند؟

(۱)  $\|z\| = |x| + |y|$

(۲)  $\|z\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$

(۳)  $\|z\| = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

(۴)  $\|z\| = (|x|^r + |y|^r)^{\frac{1}{r}}$

۱۲- در فضای متریک  $(X, d)$  نقطه  $p \in X$  یک نقطه تراکم  $E$  است هرگاه هر همسایگی  $p$  مجموعه  $E$  را در نا شمارا نقطه قطع کند. در  $\mathbb{R}^k$  با متریک اقلیدسی اگر  $E$  نا شمارا و  $F$  مجموعه نقاط تراکم  $E$  باشد آنگاه :

(۱)  $F$  نا شمارا است .

(۲)  $E \cap F$  نا شمارا است.

(۳)  $F$  کامل است. (یعنی  $F' = F$ ).

(۴) همه موارد صحیح است.

۱۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر نمی‌تواند مجموعه حدود زیر دنباله‌ای یک دنباله حقیقی باشد؟

(۱)  $\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$

(۲)  $\mathbb{Z}$

(۳)  $\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$

(۴) گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح‌اند.

۱۴- فرض کنید  $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$  و تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \inf\{|y - x| : y \in A\}$  تعریف شود. در صورتی

که  $K$  مجموعه نقاطی باشد که تابع  $f$  در آن نقاط مشتق پذیر نیست، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر نقطه  $K$ ، نقطه‌ای تنها در  $K$  است.

(۲)  $K$  بسته است ولی فشرده نیست.

(۳)  $K$  بسته نیست.

(۴)  $K$  فشرده است.

۱۵- فرض کنید  $f(x)$  بر بازه  $[0, 1]$  کراندار باشد و برای  $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$  که  $a, b > 1$  در رابطه  $f(ax) = bf(x)$  صدق کند. مقدار

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{a}{b}$
- (۲)  $\frac{b}{a}$
- (۳)  $f(0)$
- (۴) ۱

۱۶- اگر تابع  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  صعودی و از راست پیوسته باشد و برای هر

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \right\}, E \subseteq \mathbb{R}$$

آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

(۱) برای هر مجموعه بورل  $F$ ،  $\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}$

(۲) برای هر مجموعه بورل  $E$ ،  $\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$

(۳) اگر برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\mu(\{x\}) = 0$  آن گاه  $F$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

(۴) اگر  $F$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد آن گاه برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\mu(\{x\}) = 0$

۱۷- اگر  $\mu^*$  اندازه ای خارجی روی  $X$ ،  $A \subseteq X$  و  $A^c$  متمم  $A$  باشد، آنگاه حکم  $\mu^*(B \cup C) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$  برای هر

$$C \subseteq A^c \text{ و } B \subseteq A$$

(۱) از اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  قوی تر است ولی با آن معادل نیست.

(۲) از اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  ضعیف تر است ولی با آن معادل نیست.

(۳) با اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  معادل است.

(۴) با اندازه پذیری  $A$  نسبت به  $\mu^*$  ارتباطی ندارد.

## پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۶

304A

مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱)

۱۸- فرض کنید  $T = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x - y \in \mathbb{Q}\}$ . کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اندازه پذیر لیگ است ولی پوچ نیست.

(۲)  $T$  مجموعه‌ای پوچ است.

(۳) اندازه پذیر لیگ نیست.

(۴)  $T$  پوچ است ولی اندازه پذیر لیگ نیست.

۱۹- اگر  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و روی بازه باز  $(0, 1)$  مشتق پذیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $f'$  اندازه پذیر بورل و لیگ است.

(۲)  $f'$  اندازه پذیر بورل است ولی اندازه پذیر لیگ نیست.

(۳)  $f'$  اندازه پذیر لیگ است ولی اندازه پذیر بورل نیست.

(۴)  $f'$  نه اندازه پذیر لیگ است و نه اندازه پذیر بورل.

۲۰- اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  اندازه پذیر لیگ و  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر  $g$  اکیداً یکنوا باشد،  $fg$  اندازه پذیر لیگ است.

(۲) اگر  $g$  پیوسته یکنواخت باشد،  $fg$  اندازه پذیر لیگ است.

(۳) اگر  $g^{-1}(N)$  برای هر مجموعه پوچ  $N$  اندازه پذیر لیگ باشد،  $fg$  اندازه پذیر لیگ است.

(۴)  $fg$  اندازه پذیر لیگ است ولی لزوماً اندازه پذیر لیگ نیست.

۲۱- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  نگاشتی باشد به طوری که تابع  $|f|$  و مجموعه  $f^{-1}(F)$  برای هر مجموعه متناهی  $F \subseteq \mathbb{R}$

اندازه پذیر هستند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر  $f$  یک‌به‌یک باشد،  $f$  اندازه پذیر است.

(۲) اگر  $f$  کرندار باشد، اندازه پذیر است.

(۳)  $|f|$  اندازه پذیر است.

(۴) هیچکدام

۲۲- فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = 0 \quad (۱)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) + f(0) \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(0) \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1) \quad (۴)$$

۲۳- فرض کنید  $(X, M, \mu)$  یک فضای اندازه و  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار در  $L^1(\mu)$  باشد. کدام یک از گزاره های زیر درست نیست؟

$$(۱) \quad \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \quad \text{اگر تقریباً همه جا } f_n \uparrow f \text{ و } 0 \leq f_n$$

(۲) فرض کنید  $g \in L^1(\mu)$  موجود باشد به طوری که برای هر  $n$ ، تقریباً همه جا  $|f_n| \leq g$ . در این صورت  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  در اندازه همگراست اگر و تنها اگر  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  در نرم  $L^1(\mu)$  همگرا باشد.

(۳) اگر  $\mu(X) < +\infty$  آنگاه  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  در اندازه همگراست اگر و تنها اگر  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  در نرم  $L^1(\mu)$  همگرا باشد.

(۴) اگر تقریباً همه جا  $f_n \geq 0$  و  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  در اندازه همگرا به  $f$  باشد آنگاه  $\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$ .

۲۴- فرض کنید  $f$  تابعی انتگرال پذیر (حقیقی مقدار) روی فضای اندازه  $(X, M, \mu)$  باشد و  $\lambda > 0$  و  $E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\lambda\}$  ( $n \geq 1$ ) کدام گزینه صحیح است؟

$$(۱) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0$$

$$(۲) \quad \int_{E_n} f d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} 0 \quad (\text{همگرایی در اندازه نسبت به } \mu).$$

$$(۳) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(E_n) = 0$$

(۴) هر سه مورد.

۲۵- فرض کنید  $f \in L^1(\mathbb{R})$  و  $a > 0$ . کدام گزینه درست نیست؟ ( $m$  اندازه لبگ روی  $\mathbb{R}$  است)

$$(۱) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_a^{a+\frac{x}{n}} \left| f\left(n + \frac{x}{n}\right) \right| dm(x) = a \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x)$$

$$(۲) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(n + \frac{x}{n}\right) \right| \quad \text{تقریباً برای هر } x \text{ همگراست.}$$

$$(۳) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \int_{-\infty}^{\infty} |f(nx)| dm(x) = \infty \quad \text{اگر } f \text{ کراندار نباشد آنگاه}$$

$$(۴) \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} n^{-a} f(nx) = 0 \quad \text{تقریباً برای هر } x.$$

۲۶- اگر  $[a, b]$ ،  $C^1[a, b]$  و  $P[a, b]$  به ترتیب فضای توابع پیوسته، توابع به طور پیوسته مشتق پذیر و چند جمله‌ای‌ها روی  $[a, b]$  باشد، کدام گزاره صحیح است؟

(۱)  $C[a, b]$  در  $L^1[a, b]$  چگال است ولی  $C^1[a, b]$  و  $P[a, b]$  چگال نیستند.

(۲)  $C[a, b]$  و  $C^1[a, b]$  در  $L^1[a, b]$  چگال اند ولی  $P[a, b]$  چگال نیست.

(۳) هیچ یک در  $L^1[a, b]$  چگال نیست.

(۴) هر سه فضا در  $L^1[a, b]$  چگال اند.

۲۷- فرض کنید  $f$  و  $g$  توابعی انتگرال پذیر و حقیقی - مقدار روی فضای اندازه  $(X, M, \mu)$  باشند. کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $fg \in L^1(\mu)$

(۲)  $(f^2 + g^2)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mu)$

(۳)  $fg \in L^2(\mu)$

(۴) هیچکدام

۲۸- فضاهای  $X = C[0, 1]$  و  $Y = C^1[0, 1]$  (توابع مشتق پذیر با مشتق پیوسته) را با نرم سوپریم در نظر بگیرید. فرض کنید  $Z = \{f \in Y : f(0) = 0\}$  و  $T: X \rightarrow Z$  با ضابطه ذیل تعریف شود. کدام گزینه صحیح است؟

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(۱)  $T$  پیوسته و دوسویی است ولی وارون آن پیوسته نیست.

(۲)  $T$  دو سرپی است ولی پیوسته نیست.

(۳)  $T$  پیوسته است ولی دوسویی نیست.

(۴)  $T$  پیوسته و دوسویی است و وارون آن پیوسته است.

۲۹- فضای ضرب داخلی  $X = C[-1, 1]$  را با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f \bar{g} dt$  در نظر بگیرید. فرض کنید

$M = \{f \in X : f(t) = 0 \text{ (} -1 \leq t \leq 0 \text{)}\}$  در مورد مجموعه های  $M^{\perp}$  و  $M \oplus M^{\perp}$  چه می توان گفت؟ که در آن برای هر زیر فضای  $N$  از  $X$ ،  $N^{\perp} = \{f \in X : \langle f, g \rangle = 0, g \in N\}$ .

(۱)  $M \oplus M^{\perp} = X$  و  $M^{\perp\perp} = M$

(۲)  $M \oplus M^{\perp} \neq X$  ولی  $M^{\perp\perp} = M$

(۳)  $M^{\perp\perp} \neq M$  ولی  $M \oplus M^{\perp} = X$

(۴)  $M \oplus M^{\perp} \neq X$  و  $M^{\perp\perp} \neq M$

۳۰- فرض کنید برای  $\ell^1$  و  $x = \{x_n\} \in \ell^1$  و  $\|x\| = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$  (توجه کنید که  $\ell^1$  معمولاً با نرم  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  در نظر گرفته می شود). در این صورت:

(۱)  $\|0\|$  در نامساوی مثلث صدق نمی کند، پس یک نرم نیست.

(۲)  $\|0\|$  با  $\|0\|_1$  معادل است.

(۳) فضای  $(\ell^1, \|0\|)$  نرم دار است ولی باناخ نیست.

(۴) فضای  $(\ell^1, \|0\|)$  باناخ است ولی  $\|0\|$  با  $\|0\|_1$  معادل نیست.



## پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۹

304A

مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱)

۳۱- فرض کنید  $M$  یک  $R$  - مدول متناهی مولد باشد. کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر زیر مدول  $M$  متناهی مولد است.
- (۲) هر مدول خارج قسمتی  $M$  متناهی مولد است.
- (۳)  $M$  یک  $R$  - مدول نوتری است.
- (۴)  $M$  یک  $R$  - مدول آرئینی است.

۳۲- کدام یک در مورد  $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$  به عنوان  $\mathbb{Z}$  - مدول صحیح است؟

- (۱) آرئینی و نوتری نیست.
- (۲) آرئینی است ولی نوتری نیست.
- (۳) نوتری است ولی آرئینی نیست.
- (۴) هم نوتری است و هم آرئینی است.

۳۳- گروه  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q} \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Q})$  با کدام گروه زیر یکرخت است؟

- (۱)  $\mathbb{Q}$
- (۲)  $\mathbb{Q}$
- (۳)  $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$
- (۴)  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$

۳۴- کدام گزینه در مورد تعداد جواب‌های معادله  $|\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{12}| = \frac{n}{4}$  درست است؟

- (۱) یک جواب دارد.
- (۲) جواب ندارد.
- (۳) دو جواب دارد.
- (۴) بی‌نهایت جواب دارد.

۳۵- فرض کنید  $F$  یک میدان است، آنگاه  $F[x]$  به عنوان یک  $F[x]$  مدول دارای کدام خاصیت زیر است؟

- (۱) آرئینی است و نوتری نیست.
- (۲) نوتری و آرئینی نیست.
- (۳) نوتری است و آرئینی نیست.
- (۴) نوتری و آرئینی است.

۳۶- کدام یک از حلقه‌های زیر نیمه ساده هستند؟

- (۱)  $\mathbb{Z}_{16}$
- (۲)  $\mathbb{Z}_{18}$
- (۳)  $\mathbb{Z}_{20}$
- (۴)  $\mathbb{Z}_{30}$

## پی اچ دی تست ، وب سایت تخصصی آزمون دکتری

صفحه ۱۰

304A

مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱)

- ۳۷- فرض کنید  $M$  یک  $R$  - مدول باشد، اگر  $\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rx = 0, \forall x \in M\}$  آنگاه  $\text{Ann}_R(M)$ :
- (۱) یک ایده آل دو طرفه  $R$  است.
  - (۲) فقط ایده آل چپ  $R$  است.
  - (۳) فقط ایده آل راست  $R$  است.
  - (۴) ایده آل  $R$  نیست.
- ۳۸- فرض کنید  $R$  حلقه ماتریس های بالا مثلثی مرتبه  $n$  با درآیه های حقیقی باشد، در این صورت رادیکال جیکوبسون  $R$  کدام یک از مجموعه های زیر است؟
- (۱)  $\{0\}$
  - (۲) تمام ماتریس های بالا مثلثی که دترمینان آن ها صفر است.
  - (۳) تمام ماتریس های بالا مثلثی که تریس (رد) آنها صفر است.
  - (۴) تمام ماتریس های بالا مثلثی که درآیه های روی قطر آن ها صفرند.
- ۳۹- فرض کنید  $R = \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  و  $M$  یک  $R$  - مدولی با تولید متناهی و  $I = \{(a, 0, 0) \mid a \in \{0, 5, 10, 15, 20\}\}$  چنانچه  $IM = M$  داریم:
- (۱)  $|\text{Ann}_R(M)| = 5$
  - (۲)  $M = \{0\}$
  - (۳)  $\text{Ann}_R(M) = \{0\}$
  - (۴)  $M$  یک  $R$  - مدول نامتناهی است.
- ۴۰- فرض کنید  $R$  حلقه ای آر تینی چپ باشد و مجموعه یکال های آن متناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟
- (۱)  $J(R)$  متناهی است.
  - (۲) حلقه  $R$  نامتناهی است.
  - (۳) گروه یکال های  $R$  آبدی است.
  - (۴) گروه یکال های  $R$  دوری است.
- ۴۱- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟
- (۱) هر جمعونند مستقیم یک مدول انژکتیو (تزریقی)، انژکتیو است.
  - (۲) هر جمعونند مستقیم یک مدول تصویری، تصویری است.
  - (۳) هر جمعونند مستقیم یک مدول آزاد، آزاد است.
  - (۴) هر جمعونند مستقیم یک مدول آزاد، تصویری است.
- ۴۲- فرض کنید  $R$  یک حلقه و  $I$  ایده آلی از آن که  $I \subseteq J(R)$  و  $N$  یک  $R$  - مدول با تولید متناهی، اگر  $f: M \rightarrow N$  یک  $R$  مدول همریختی و  $\bar{f}: \frac{M}{IM} \rightarrow \frac{N}{IN}$  که  $\bar{f}(m + IM) = f(m) + IN$ ، کدام گزینه صحیح است؟
- (۱)  $\bar{f}$  ممکن است خوش تعریف نباشد.
  - (۲) اگر  $\bar{f}$  یک به یک باشد  $f$  نیز یک به یک است.
  - (۳) اگر  $\bar{f}$  یکریختی باشد  $f$  نیز چنین است.
  - (۴) اگر  $\bar{f}$  پوشا باشد  $f$  نیز پوشاست.

۴۳- کدام یک از گروه‌های آبدلی به عنوان  $\mathbb{Z}$  - مدول انژکتیو (تزریقی) نیستند؟

(۱)  $\mathbb{R}$

(۲)  $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۳)  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۴)  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$

۴۴- فرض کنید  $G$  گروهی آزاد و آبدلی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $G$  با حاصل ضربی از گروه‌های نامتناهی یکریخت است.

(۲)  $G$  گروهی دوری و نامتناهی است.

(۳)  $G$  حاصل ضرب تعدادی گروه آبدلی متناهی و گروه  $\mathbb{Z}$  است.

(۴)  $G$  گروهی دوری و متناهی است.

۴۵- اگر  $\mathbb{R}^*$  و  $\mathbb{C}^*$  به ترتیب گروه‌های ضربی اعداد حقیقی ناصفر و اعداد مختلط ناصفر باشند، آنگاه  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{R}^* \oplus \mathbb{C}^*)$  با کدام گروه یکریخت است؟

(۱)  $\circ$

(۲)  $\mathbb{Z}_6$

(۳)  $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$

(۴)  $\mathbb{Z}_{12}$